SUCCESSIONI PER RICORRENZA

1) Se per hp. $\exists$ una succ. che converge a l si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = l = \lim_{n\to+\infty} \text{"legge"} = l$$

$x_n \to$ sostituisco l e trovo i punti fissi

2) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \sqrt{(16+a_n)} \end{cases}$

hp: successione per ricorrenza

th: dire se converge e calcolare il limite

1) Supponiamo esista $\Rightarrow l = \lim_{n\to+\infty} a_n$

2) $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = l$

3) $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{16+a_n}$

4) Sostituire : $l = \sqrt{16+l} \Rightarrow l^2 = 16 + l \Rightarrow l = \frac{1}{2}(1+\sqrt{65})$

5) Se il limite esiste è finito

6) Dimostriamo che esiste:

7) Dimostriamo la monotonia per induzione:

PB: $4 = a_1 \leq a_2 = \sqrt{20}$ ok

PI: Suppongo $a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow$ Voglio dim. che $a_n \leq a_{n+1}$

$a_{n+1} = \sqrt{16+a_n} \geq \sqrt{16+a_{n-1}} = a_n$ per il PI e per il fatto che $\sqrt{16+x} = f(x)$

è monotona decrescente in $[-16, +\infty)$

8) Dimostriamo che è limitata superiormente per induzione:

PB: $a_1 \leq 5$ ok

PI: Suppongo $a_n \leq 5 \Rightarrow a_{n+1} \leq 5$

$a_{n+1} = \sqrt{16+a_n} \leq \sqrt{16+5} = \sqrt{21} \leq 5$

$\Rightarrow$ È limitata superiormente

9) $\Rightarrow$ Il limite esiste ed è l per il punto fisso

3) Studiare $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+1}{a_n+2} \quad \text{se } n \geq 1 \end{cases}$

Oss 1) la successione è a termini positivi

Oss 2) la successione è decrescente : i termini sono tutti < 1

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \frac{a_n+1}{a_n+2} = \ell \Rightarrow \frac{\ell+1}{\ell+2} = \ell \Rightarrow \ell+1 = \ell^2+2\ell$$

$$\Rightarrow \ell^2+\ell-1=0 \Rightarrow \ell_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Oss 3) Poiché la successione è definita positiva l'unico ℓ che posso avere è $\ell > 0 \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

4) $\begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n|a_n| + 1 \end{cases}$

Caso 1) $a_1 = \lambda \geq 0 \Rightarrow a_2 = \lambda^2 - \lambda^2 + 1 = 1$, $a_3 = 1-1+1 = 1$

per induzione : se $a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 1 \Rightarrow$ la succ. è costante

Caso 2) $a_1 = \lambda < 0 \Rightarrow a_2 = \lambda^2 + \lambda^2 + 1 = 2\lambda^2 + 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_3 = (2\lambda^2+1)^2 - (2\lambda+1)^2 + 1 = 1$

Generalizzando: Se $a_1 = \lambda \geq 0 \Rightarrow a_n = \begin{cases} \lambda & \text{se } n=1 \\ 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Se $a_1 = \lambda < 0 \Rightarrow a_n = \begin{cases} \lambda & \text{se } n=1 \\ 2\lambda^2+1 & \text{se } n=2 \\ 1 & \text{se } n\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Con il pt. fisso: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\ell = \ell^2 - \ell|\ell| + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \ell \geq 0 \\ \ell^2 - \ell^2 + 1 = \ell = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \ell < 0 \\ \ell = \ell^2 + \ell^2 + 1 = 2\ell^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow$ la suc. è conv. $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$\hookrightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ non ha sol.